×I20×

ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES
DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1977

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Les parties sont indépendantes. Respecter la numérotation.

I. On désigne par E l'ensemble des fonctions numériques définies et continues sur $[0, +\infty[$ telles que, pour tout $f \in E$, on ait :

$$\int_0^{+\infty} \left[f(x)\right]^2 e^{-x}\, dx < +\infty$$

1°) Montrer que si $f \in E$ et $g \in E$, alors

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ g(x)\ e^{-x}\, dx$$

converge absolument. En déduire que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Montrer que tout polynôme de $\mathbb{R}[x]$ est élément de E.

2°) Pour tout $f \in E$ et tout $g \in E$, on définit :

$$(f|g) = \int_0^{+\infty} f(x)\ g(x)\ e^{-x}\, dx$$

Montrer que $(f|g)$ est un produit scalaire sur E. Préciser la norme qui lui est associée.
Soit la suite de fonctions e_n définies par $e_n(x) = x^n$. Calculer $(1|e_n)$.

3°) Calculer, pour $m \in \{0, 1, 2\}$, $n \in \{0, 1, 2\}$, $P_m(x)$ et $P_n(x)$ appartenant à $\mathbb{R}[x]$, les polynômes de degré inférieur ou égal à deux tels que :

$$(P_m|P_n) = 0 \text{ pour } m \neq n \ ; \quad (P_m|P_n) = 1 \text{ pour } m = n.$$

II. Soit (f_n), pour $n \geqslant 1$, la suite de fonctions numériques définies sur $[0, 1]$ par : $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + nx^2}$

1°) Montrer que la suite (f_n), $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on déterminera avec précision.

2°) Étudier la convergence uniforme de f_n sur $]0, 1]$ et sur $[a, 1]$ pour $0 < a < 1$.

3°) Soit (g_n), $n \in \mathbb{N}$ une suite de fonctions continues définies sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et convergeant uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g.

Soit (x_n), $n \in \mathbb{N}$, une suite de points de $[a, b]$ convergeant vers x.

Montrer que la suite $g_n(x_n)$ converge vers $g(x)$.

4°) (f_n) est la suite définie ci-dessus.

La suite $f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ converge-t-elle vers $f(1)$?

Étudier les limites des suites : $f_n\left(\frac{1}{n^2}\right)$; $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$; $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Les résultats obtenus sont-ils surprenants ?

.../...

III. 1°) On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. ×I2I×

Démontrer que : $\|P\| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$, $P \in E$,

définit une norme sur E.

2°) Quelle est la limite, au sens de cette norme, quand $n \to +\infty$, de la suite de polynômes P_n définie par :

$$n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \ ?$$

3°) Montrer que $u : P \to u(P) = P(3)$ définit une application linéaire u de l'espace E dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels.
Quelle est la limite de la suite $u(P_n)$ quand $n \to +\infty$, la suite P_n étant définie au 2°) ?

4°) Déduire de ce qui précède l'étude de la continuité de l'application u.

IV. 1°) λ étant un paramètre réel, on considère la famille (F) de coniques ayant pour équation :

$\frac{x^2}{\lambda - 1} + \frac{y^2}{\lambda - 3} = 1$, dans un repère orthonormé $x0y$.

Étudier, suivant les valeurs de λ, la nature des coniques de (F). Préciser les foyers des coniques réelles de (F).

2°) Par le point $\left(x_0 = \frac{5}{4}, y_0 = \frac{3}{4}\right)$ passent une ellipse E_0 et une hyperbole H_0 de la famille (F). Calculer numériquement les valeurs de λ correspondantes. Préciser les longueurs des demi-axes et les équations de E_0 et H_0. Sous quel angle les coniques E_0 et H_0 se coupent-elles ?

3°) Pour a positif, u et v réels on considère les expressions :

(1) $x = a \operatorname{ch} u \cos v$
$y = a \operatorname{sh} u \sin v$

a) – Représenter graphiquement sur la même feuille
- l'ellipse E obtenue pour a et u donnés et v variable,
- l'hyperbole H obtenue pour a et v donnés et u variable.

b) – Déterminer les valeurs a et u_0 définissant l'ellipse E_0 pour les valeurs a et v_0 définissant l'hyperbole H_0 (la valeur a étant commune).

c) – Calculer le jacobien $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ de la transformation (1).

d) – Calculer l'aire de la surface limitée par E_0, H_0 et les demi-axes $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail